



گزینه ۴

۱

$$\bar{v} = \frac{\Delta x_1 + \Delta x_2}{t_1 + t_2} = \frac{\Delta x_1 + v_2 t_2}{\frac{\Delta x_1}{v_1} + t_2} = \frac{k + 2k}{\frac{k}{2} + 2} = \frac{6k}{k + 4}$$

$$\Rightarrow \frac{6k}{k + 4} = k - 4 \Rightarrow k^2 - 16 = 6k \Rightarrow k^2 - 6k - 16 = (k - 8)(k + 2) = 0 \Rightarrow k = 8$$

جابه‌جایی این متحرک در کل برابر است با:

$$\Delta x = \Delta x_1 + \Delta x_2 = 8 + 2 \times 8 = 24$$

گزینه ۴

۲

در حین حرکت یک جسم، متحرک در لحظه دلخواه t می‌تواند در یک مکان معین x باشد (یعنی نمی‌تواند در یک لحظه در چند مکان مختلف حضور داشته باشد). پس گزینه "۴" نمی‌تواند نمودار $x - t$ یک متحرک باشد.

گزینه ۲

۳

این ذره در لحظه‌های 6 s و 15 s برای اولین و آخرین بار تغییر جهت می‌دهد و در این لحظه‌ها به ترتیب در مکان‌های 17 m و 31 m قرار دارد. سرعت متوسط آن را در این بازه زمانی حساب می‌کنیم:

$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{31\text{ m} - 17\text{ m}}{15\text{ s} - 6\text{ s}} = \frac{14}{9} \text{ m/s}$$

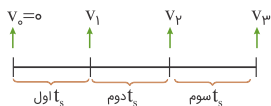
همچنین ذره در لحظه‌های 2 s و 20 s از مبدأ مکان می‌گذرد. برای محاسبه تندی متوسط ذره در این بازه زمانی به این صورت عمل می‌کنیم:

$$\begin{cases} \Delta x_1(2\text{ s}, 6\text{ s}) = 17\text{ m} - 0\text{ m} = 17\text{ m} \\ \Delta x_2(6\text{ s}, 10\text{ s}) = 8\text{ m} - 17\text{ m} = -9\text{ m} \\ \Delta x_3(10\text{ s}, 15\text{ s}) = 31\text{ m} - 8\text{ m} = 23\text{ m} \\ \Delta x_4(15\text{ s}, 20\text{ s}) = 0\text{ m} - 31\text{ m} = -31\text{ m} \end{cases}$$

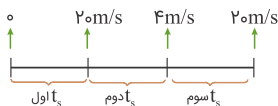
$$\Rightarrow \text{مسافت طی شده } L = |\Delta x_1| + |\Delta x_2| + |\Delta x_3| + |\Delta x_4| = 80\text{ m}$$

$$\Rightarrow S_{av} = \frac{L}{\Delta t} = \frac{80\text{ m}}{20\text{ s} - 2\text{ s}} = \frac{40}{9} \text{ m/s} \Rightarrow \frac{S_{av}}{v_{av}} = 2/1$$

برای هرگونه اظهار نظری ابتدا باید به سرعت اولیه و پایانی هرکدام از مراحل گفته شده برسیم:



باتوجه به رابطه سرعت متوسط با شتاب ثابت داریم $(v_{av} = \frac{v_1 + v_2}{2})$:



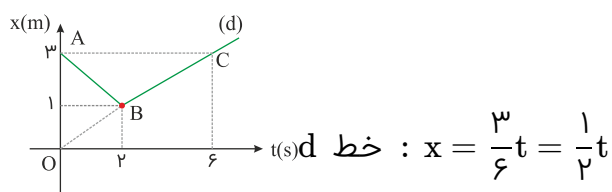
$$\begin{cases} \text{اول } t_s : 10 = \frac{0 + v_1}{2} \Rightarrow v_1 = 20 \text{ m/s} \\ \text{دوم } t_s : 12 = \frac{20 + v_2}{2} \Rightarrow v_2 = 4 \text{ m/s} \\ \text{سوم } t_s : 12 = \frac{4 + v_3}{2} \Rightarrow v_3 = 20 \text{ m/s} \end{cases}$$

پس نوع حرکت در ابتدا تندشونده، سپس کندشونده و در نهایت تندشونده بوده است.

باتوجه به نمودار، متحرک در لحظه $t = 12 \text{ s}$ دارای سرعت صفر است و جایی که سرعت صفر شود حرکت تغییر جهت می‌دهد؛ پس داریم:

$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{-8 - 6}{12 - 2} = -\frac{14}{10} = -1.4 \text{ m/s}$$

در ابتدا معادله خطی از نمودار مکان زمان که از مبدأ مختصات عبور می‌کند را به دست می‌آوریم (خط d) و به وسیله آن مکان متحرک را در لحظه $t = ۲s$ مشخص می‌کنیم (شکل زیر):



$$\text{نقطه } B : t_B = ۲s \Rightarrow x_B = \frac{1}{2} \times ۲ = ۱m$$

سرعت متحرک در لحظه $t = ۱s$ برابر با شیب پاره خط AB و سرعت متحرک در لحظه $t = ۴s$ برابر با شیب پاره خط BC است، بنابراین:

$$t_1 = ۱s \Rightarrow v_1 = \frac{۱ - ۳}{۲ - ۰} = \frac{-۲}{۲} = -۱m/s \Rightarrow \vec{v}_1 = -\vec{i}$$

$$t_۲ = ۴s \Rightarrow v_۲ = \frac{۳ - ۱}{۴ - ۲} = \frac{۲}{۲} = ۱m/s \Rightarrow \vec{v}_۲ = \vec{i}$$

و در پایان شتاب متوسط متحرک در بازه $t = ۱s$ تا $t = ۴s$ را به دست می‌آوریم:

$$\vec{a}_{av} = \frac{\vec{v}_۲ - \vec{v}_1}{t_۲ - t_1} = \frac{\vec{i} - (-\vec{i})}{۴ - ۱} = \frac{۲\vec{i}}{۳} = \frac{۲}{۳}\vec{i}$$

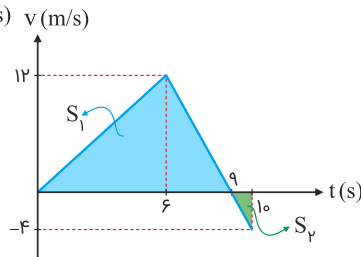
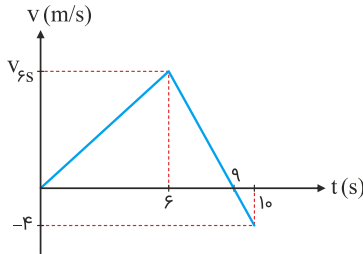
ابتدا با استفاده از رابطه شتاب متوسط و با توجه به این که سرعت متحرک در $t = 0$ برابر صفر است، سرعت متحرک در $t = 10\text{ s}$ را به دست می‌آوریم:

$$a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t} \Rightarrow -0/4 = \frac{v_{10s} - 0}{10 - 0} \Rightarrow v_{10s} = -4\text{ m/s}$$

با توجه به این که نمودار سرعت - زمان در بازه $(6\text{ s}, 10\text{ s})$ به صورت خط راست است، سرعت متحرک در $t = 6\text{ s}$ را به دست می‌آوریم:

$$a_{av}(6s, 9s) = a_{av}(9s, 10s) \Rightarrow \frac{0 - v_{6s}}{9 - 6} = \frac{-4 - 0}{10 - 9} \Rightarrow v_{6s} = 12\text{ m/s}$$

حالا مساحت سطح زیر نمودار $v - t$ را که برابر جابه‌جایی متحرک است به دست می‌آوریم:



$$\Delta x = S_1 - S_2 = \frac{9 \times 12}{2} - \frac{4 \times 1}{2} = 52\text{ m}$$

در نهایت با استفاده از $v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$ ، سرعت متوسط متحرک را به دست می‌آوریم:

$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{52}{10} = 5.2\text{ m/s}$$

چون نمودار $x - t$ به صورت یک سهمی است، حرکت متحرک شتاب ثابت است و شتاب آن در هر لحظه عدد ثابتی می‌باشد. نمودار در لحظه $t = 3\text{ s}$ بر محور t مماس شده است، در نتیجه معادله آن به صورت زیر است:

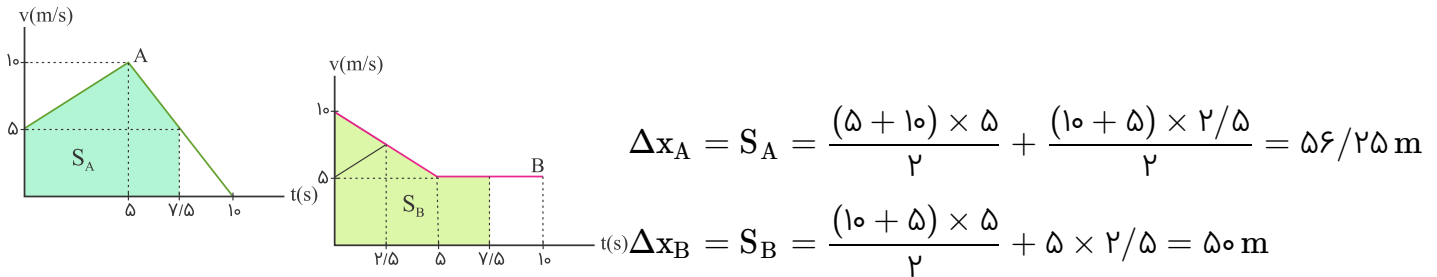
$$x = A(t - 3)^2 \xrightarrow{t=0 \Rightarrow x=18} 18 = A(0 - 3)^2 \Rightarrow A = 2$$

$$x = 2(t - 3)^2 = 2(t^2 - 6t + 9) \Rightarrow x = 2t^2 - 12t + 18$$

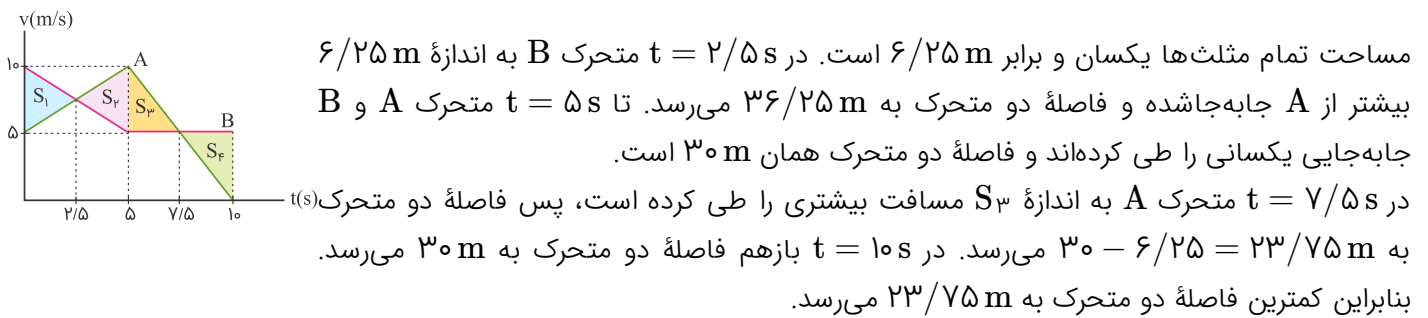
به کمک معادله مکان- زمان حرکت شتاب ثابت می‌توانیم جسم را محاسبه کنیم:

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{1}{2}at^2 + v_0t + x_0 \\ x &= 2t^2 - 12t + 18 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{1}{2}a = 2 \Rightarrow a = 4\text{ m/s}^2$$

در بازه زمانی $(0, 2/5)$ ، سرعت متحرک B بیشتر از متحرک A است. چون در ابتدا متحرک B جلوتر از متحرک A است، در این بازه فاصله دو متحرک افزایش می‌یابد. در بازه $(2/5, 7/5)$ سرعت متحرک A بیشتر از متحرک B است. پس در این بازه فاصله دو متحرک کم می‌شود. بنابراین جابه‌جایی دو متحرک در بازه $(0, 7/5)$ را به دست می‌آوریم. سطح زیر نمودار هر متحرک در این بازه برابر جابه‌جایی هر متحرک است.



باتوجه به جابه‌جایی‌های بالا، متحرک A در $7/5$ ثانیه نخست، $6/25$ متر بیشتر از متحرک B طی کرده است. چون در ابتدا متحرک A، 30 متر عقب‌تر از B بوده است در $t = 7/5 \text{ s}$ ، از این فاصله، $6/25$ متر کم می‌شود و به $23/75 \text{ m}$ می‌رسد. از $t = 7/5 \text{ s}$ به بعد بازهم سرعت B بیشتر از A است و فاصله دو متحرک مجدداً افزایش می‌یابد. بنابراین کمترین فاصله دو متحرک $23/75 \text{ m}$ است. روش تستی: به مثلث‌های مشخص شده در شکل توجه کنید.



$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \xrightarrow{\Delta t = 2 \text{ s}} \begin{cases} \Delta x_F = v_{av_F} \times 2 \\ \Delta x_V = v_{av_V} \times 2 \end{cases} \quad (1)$$

$$\frac{v_{av_F} - v_{av_V} = -12}{\text{طرفین را دو برابر می‌کنیم}} \rightarrow 2v_{av_F} - 2v_{av_V} = -24 \quad (2)$$

$$\Rightarrow \Delta x_F - \Delta x_V = -24$$

نکته: اگر در حرکتی با شتاب ثابت، بازه‌های زمانی t ثانیه، t ثانیه تقسیم‌بندی شوند، اعداد جابه‌جایی تشکیل یک دنباله حسابی با قدر نسبت at^2 می‌دهند:

$$\Delta x_n = \Delta x_1 + (n-1)d \xrightarrow{\text{در این سؤال}} \begin{cases} \Delta x_F = \Delta x_V + 2d \\ \Delta x_F = \Delta x_V + (-24) \end{cases} \Rightarrow 2d = -24 \Rightarrow d = -12$$

$$\Rightarrow a(2)^2 = -12 \Rightarrow a = -3 \text{ m/s}^2$$

* اندازه شتاب برابر با 3 m/s^2 است.

این متحرک فقط در لحظه t_1 جهت حرکتش را تغییر داده است و در لحظه t_4 صرفاً متوقف شده است. در بازه زمانی t_2 تا t_3 حرکت یکنواخت در جهت مثبت محور x ها وجود دارد. در بازه زمانی 0 تا t_1 حرکت در خلاف جهت محور x بوده است. (رد گزینه‌های ۱ و ۲ و ۳)
توجه شود در لحظه t_1 به مکان $x = 0$ رسیده‌ایم و در ادامه باتوجه به نامنفی بودن سرعت، همواره در مکان‌های مثبت قرار داریم و بردار مکان نیز مثبت خواهد بود.

چون از سرعت اولیه متحرک بی‌خبریم، بنابراین هر سه نمودار می‌توانند مربوط به این متحرک باشند.

باتوجه به تقارن سهمی نسبت به رأس آن، ریشه دیگر این نمودار را به دست می‌آوریم:

$$4 = \frac{t_1 + 6}{2} \Rightarrow t_1 = 2 \text{ (s)}$$

معادله سهمی در حالت کلی به صورت $x = k(t - t_1)(t - t_2)$ است. که در آن k ضریب ثابت و t_1 و t_2 ریشه‌های معادله هستند؛ بنابراین:

$$x = k(t - 2)(t - 6)$$

برای به دست آوردن k ، $(x = 8 \text{ m}, t = 4 \text{ s})$ را در رابطه بالا قرار می‌دهیم؛

$$x = k(t - 2)(t - 6) \xrightarrow{t=4 \text{ s}, x=8 \text{ m}} 8 = k(4 - 2)(4 - 6) \Rightarrow k = -2$$

بنابراین معادله مکان - زمان نمودار داده شده به صورت زیر خواهد بود:

$$x = -2(t - 2)(t - 6) = -2(t^2 - 8t + 12) = -2t^2 + 16t - 24$$

توجه کنید: با جایگذاری اطلاعات نمودار در گزینه‌ها نیز می‌توانستیم به گزینه درست دست پیدا کنیم.

ابتدا با استفاده از رابطه $\Delta x = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t$ ، شتاب واگن‌ها را به دست می‌آوریم. طول هر واگن را L در نظر می‌گیریم.

$$\Delta x = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t \xrightarrow[v_0=0, t=3s]{\Delta x=L} L = \frac{1}{2}a(3)^2 \Rightarrow a = \frac{2L}{9}$$

مدت‌زمان رسیدن انتهای واگن شماره ۴ به نقطه A را به دست می‌آوریم:

$$\Delta x = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t \xrightarrow[\Delta x=4L]{v_0=0} 4L = \frac{1}{2}at_1^2 \Rightarrow 4L = \frac{1}{2}\left(\frac{2L}{9}\right)t_1^2 \Rightarrow t_1 = 6s$$

مدت‌زمان رسیدن انتهای واگن پنجم به نقطه A را به دست می‌آوریم:

$$\Delta x = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t \Rightarrow 5L = \frac{1}{2}at_2^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{2L}{9}\right)t_2^2 \\ \Rightarrow t_2 = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}s \simeq 3 \times 2/25 = 6/25s$$

بنابراین مدت‌زمان عبور بین ابتدا و انتهای واگن پنجم برابر $6/25 - 6 = 0/25s$ است.

باتوجه به نمودار و با استفاده از معادله مستقل از زمان، شتاب حرکت متحرک را به دست می‌آوریم:

$$v^2 - v_0^2 = 2a\Delta x \Rightarrow 16 - 36 = 2a(10 - 30) \Rightarrow a = \frac{1}{2} m/s^2$$

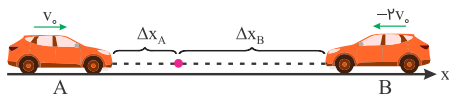
باتوجه به این‌که متحرک در خلاف جهت محور x حرکت کرده است، سرعت آن منفی است. پس $v_B = -4 m/s$ و $v_A = -6 m/s$ است. باتوجه به شتاب متحرک $2s$ قبل از رسیدن متحرک به B، سرعت متحرک (v') برابر است با:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{v_B - v'}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{-4 - v'}{2} \Rightarrow v' = -5 m/s$$

در انتها با استفاده از معادله مستقل از زمان بین v' و v_B مکان متحرک $2s$ قبل از رسیدن به مکان B را به دست می‌آوریم:

$$v_B^2 - v'^2 = 2a(x_B - x') \Rightarrow 16 - 25 = 2\left(\frac{1}{2}\right)(10 - x') \Rightarrow x' = 19 m$$

باتوجه به شکل زیر، مجموع مسافت‌های ترمز متحرک‌ها برابر حداقل فاصله بین دو متحرک است تا به یکدیگر برخورد نکنند.



$$\ell_{\min} = |\Delta x_A| + |\Delta x_B|$$

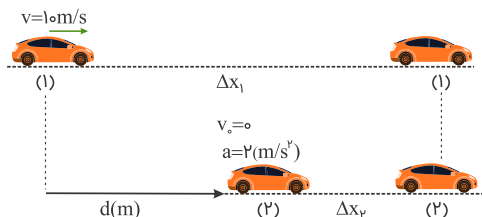
با استفاده از رابطه مستقل از زمان، مسافت توقف هر یک از متحرک‌ها را به دست می‌آوریم:

$$v^v - v_o^v = 2a\Delta x \Rightarrow \begin{cases} 0 - v_o^v = 2a_A \Delta x_A \Rightarrow |\Delta x_A| = \frac{v_o^v}{2a} \\ 0 - (-2v_o)^v = 2a_B \Delta x_B \Rightarrow |\Delta x_B| = \frac{4v_o^v}{2a} \end{cases}$$

بنابراین $\ell_{\min}$ برابر است با:

$$\ell_{\min} = \frac{v_o^v}{2|a|} + \frac{4v_o^v}{2|a|} = \frac{5v_o^v}{2|a|}$$

شرط به هم رسیدن دو متحرک:



$$\Delta x_1 = d + \Delta x_2$$

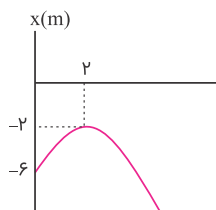
$$vt = d + \left(\frac{1}{2}at^2 + v_o t\right) \Rightarrow 10t = d + t^2 \Rightarrow t^2 - 10t + d = 0$$

در ریشه‌های معادله پیدا شده، دو متحرک به هم می‌رسند، پس در این صورت باتوجه به شرط سؤال، این معادله نباید ریشه داشته باشد:

$$\Delta < 0 \Rightarrow b^2 - 4ac < 0 \Rightarrow (-10)^2 - 4(1)(d) < 0 \Rightarrow 100 < 4d \Rightarrow 25 < d$$

پس اگر فاصله آن‌ها از یکدیگر بیشتر از ۲۵ متر باشد دو متحرک به هم نمی‌رسند.

در مرحله اول، باتوجه به معادله داده شده، نمودار مکان- زمان این متحرک را رسم می‌کنیم:



$$x = -t^2 + 4t - 6 \quad \begin{cases} \frac{-b}{2a} = \frac{-4}{2(-1)} = 2 \\ b^2 - 4ac = (4)^2 - 4(-1)(-6) < 0 \end{cases}$$

باتوجه به نمودار:

⇐ جهت بردار مکان این متحرک، در هیچ لحظه‌ای تغییر نکرده است. (نادرست)

⇐ لحظه $t = 2 \text{ s}$ ، لحظه تغییر جهت این متحرک است، یعنی در این لحظه، متحرک متوقف شده است.

پس در لحظات قبل از $t = 2 \text{ s}$ ، نوع حرکت این متحرک کندشونده بوده و مشاهده می‌شود که تا این لحظه، متحرک در جهت محور x ها در حرکت بوده است. (درست)

⇐ این متحرک دارای $(x_0 < 0)$ و $(v_0 > 0)$ است. (درست)

⇐ کمترین فاصله این متحرک از مبدأ مکان $(x = 0)$ برابر 2 m است. (درست)

ابتدا بزرگی نیروی F را با استفاده از قانون دوم نیوتون به دست می‌آوریم:

$$F = ma \Rightarrow F = 2 \times 2 = 4 \text{ N}$$

جابه‌جایی متحرک در ثانیه دوم حرکت را به دست می‌آوریم:

$$x = \frac{1}{2}at^2 + x_0 \Rightarrow x = t^2 + x_0 \Rightarrow \begin{cases} t = 1 \text{ s} \Rightarrow x_{1\text{s}} = 1 + x_0 \\ t = 2 \text{ s} \Rightarrow x_{2\text{s}} = 4 + x_0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \Delta x_{(1\text{s}, 2\text{s})} = (4 + x_0) - (1 + x_0) = 3 \text{ m}$$

با استفاده از رابطه کار، کار نیروی F را به دست می‌آوریم:

$$W = Fd \cos \theta = 4 \times 3 \times \cos 0 = 12 \text{ J}$$

ابتدا از فرمول مستقل از سرعت اولیه، شتاب را محاسبه می‌کنیم:

$$\Delta x = \frac{1}{2}at^2 + vt \Rightarrow 7\omega = \frac{1}{2}a \times \omega^2 + 20 \times \omega$$

$$\Rightarrow a = -2 \text{ m/s}^2$$

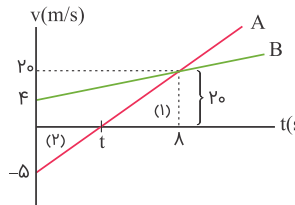
طبق تصاعد عددی خواهیم داشت:

$$x_2 = x_1 + at^2$$

$$\Delta x_2 = 7\omega - 2(\omega)^2 = 2\omega \text{ m}$$

$$V_{av} = \frac{\Delta x_2}{\Delta t} = \frac{2\omega}{\omega} = \omega \text{ m/s}$$

باتوجه به اینکه شتاب حرکت متحرک B، 2 m/s^2 است (شیب نمودار B)، پس سرعت متحرک B بعد از $\lambda \text{ s}$ به 20 m/s می‌رسد:
باتوجه به اینکه دو مثلث ۱ و ۲ متشابه‌اند، می‌توان نوشت:

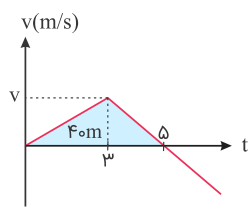


$$\frac{20}{\omega} = \frac{\lambda - t}{t} \Rightarrow 2t = \lambda - t \Rightarrow 3t = \lambda \Rightarrow t = \frac{1}{6} \text{ s}$$

متحرک A از $t = 1/6 \text{ s}$ تا $t = \lambda \text{ s}$ (باتوجه به برابر شدن سرعت‌ها) در جهت محور X ها بوده است:

$$\lambda - 1/6 = 6/4 \text{ s}$$

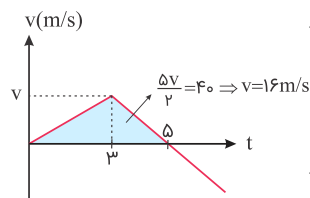
در لحظه $t = 5 \text{ s}$ تغییر جهت رخ می‌دهد، پس:



$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \Rightarrow \lambda = \frac{\Delta x}{\omega} \Rightarrow \Delta x = 40 \text{ m (سطح زیر نمودار)}$$

باتوجه به نمودار، شیب نمودار و شتاب حرکت از لحظه $t = 3 \text{ s}$ به بعد ثابت است.

$\Leftarrow$ در بازه $3 \text{ s} \leq t \leq 5 \text{ s}$:



$$v = at + v_0 \Rightarrow 0 = a(2) + 16 \Rightarrow a = -8 \text{ m/s}^2$$

پس سرعت متحرک در لحظه $t = 8 \text{ s}$ برابر است با:

$$v = at + v_0 \Rightarrow v_8 = -8(5) + 16 \Rightarrow v_8 = -24 \text{ m/s}$$

شتاب متوسط در بازه $3 \text{ s} \leq t \leq 8 \text{ s}$ برابر است با:

$$a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t} \Rightarrow a_{av} = \frac{-24 - 16}{8 - 3} = \frac{-40}{5} = -8 \text{ m/s}^2$$

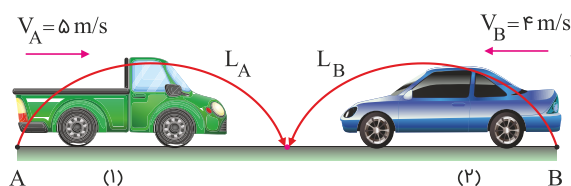
طبق خواسته سؤال، اندازه شتاب متوسط برابر است با: 8 m/s^2 .

طول مسیر را Δx در نظر می‌گیریم. ابتدا مدت‌زمان رسیدن دو متحرک به انتهای دیگر مسیر و اختلاف زمان آن‌ها (Δx) را به دست می‌آوریم:

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} \Rightarrow \begin{cases} \omega = \frac{\Delta x}{t_A} \Rightarrow t_A = \frac{\Delta x}{\omega} \\ \varphi = \frac{\Delta x}{t_B} \Rightarrow t_B = \frac{\Delta x}{\varphi} \end{cases} \Rightarrow \Delta t = t_B - t_A = \frac{\Delta x}{\varphi_0}$$

لحظه‌ای که دو متحرک به هم می‌رسند (t') را به دست می‌آوریم. در لحظه‌ای که دو متحرک به هم می‌رسند، مجموع مسافت طی‌شده آن‌ها برابر Δx است؛ پس:

$$\ell_A + \ell_B = \Delta x \Rightarrow \omega t' + \varphi t' = \Delta x \Rightarrow t' = \frac{\Delta x}{\varphi_0}$$



حالا اختلاف مسافت دو متحرک را به دست می‌آوریم:

$$\ell_A - \ell_B = \omega t' - \varphi t' = t' = \frac{\Delta x}{\varphi_0} \xrightarrow{\Delta x = \varphi_0 \Delta t} t' = \frac{\varphi_0}{\varphi} \Delta t$$

$$v_{0A} = 0 \Rightarrow \Delta x_A = \left(\frac{v + v_0}{2} \right) t \Rightarrow \Delta x_A = \frac{v_A}{2} \times t \Rightarrow \varphi_0 = \frac{v_A}{2} \cdot t$$

$$\Delta x_B = v_B \times t \Rightarrow \varphi_0 = v_B \times t$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 120 = v_A \cdot t \\ 40 = v_B \cdot t \end{cases} \Rightarrow \frac{v_A}{v_B} = 3$$

ابتدا برای رفت و برگشت رابطه $s_{av} = \frac{\ell}{\Delta t}$ را می‌نویسیم. در این رابطه تندى را برحسب km/h و زمان را برحسب ساعت جایگذاری می‌کنیم تا ℓ برحسب km به دست بیاید.

$$s_{av} = \frac{\ell}{\Delta t} \Rightarrow \begin{cases} 72 = \frac{\ell}{\Delta t} \\ 108 = \frac{\ell}{\Delta t - \frac{50}{60}} \end{cases} \xrightarrow{\text{حل دو معادله و دو مجهول}} \begin{cases} \Delta t = 2/5 \text{ h} \\ \ell = 180 \text{ km} \end{cases}$$

بردار مکان متحرک در $t = ۳$ s برابر است با:

$$x_{۳s} = (۳)^۲ - ۷(۳) + ۱۰ = ۹ - ۲۱ + ۱۰ = -۲ \Rightarrow \vec{d}_{۳s} = -۲\vec{i}$$

فاصله متحرک در $t = ۱$ s از مبدأ حرکت (مکان متحرک در لحظه $t = ۰$) برابر است با:

$$|x_{1s} - x_{0s}| = |(۱)^۲ - ۷(۱) + ۱۰ - (۱۰)| = ۶ \text{ m}$$

$$\left. \begin{array}{l} x_A = v_A t + x_{0A} \\ x_B = v_B t + x_{0B} \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{تفاضل}} x_B - x_A = (v_B - v_A)t + x_{0B} - x_{0A}$$

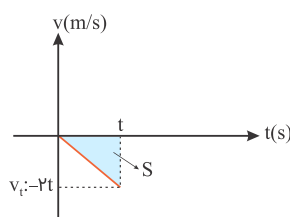
$$t' \text{ لحظه} : v_A t' + x_{0A} = v_B t' + x_{0B} \Rightarrow (v_B - v_A)t' + x_{0B} - x_{0A} = ۰ \Rightarrow t' = \frac{-(x_{0B} - x_{0A})}{v_B - v_A}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} t_۱ \text{ لحظه} : x_B - x_A = (v_B - v_A)t_۱ + x_{0B} - x_{0A} = \frac{۱}{۲}(x_{0B} - x_{0A}) \Rightarrow t_۱ = \frac{۱}{۲} \times \frac{-(x_{0B} - x_{0A})}{v_B - v_A} = \frac{۱}{۲}t' \\ t_۲ \text{ لحظه} : x_B - x_A = (v_B - v_A)t_۲ + x_{0B} - x_{0A} = \frac{-۱}{۲}(x_{0B} - x_{0A}) \Rightarrow t_۲ = \frac{۳}{۲} \times \frac{-(x_{0B} - x_{0A})}{v_B - v_A} = \frac{۳}{۲}t' \end{array} \right.$$

$$\text{پس } ۲ = \frac{t_۱ + t_۲}{t'} = \frac{\frac{۱}{۲}t' + \frac{۳}{۲}t'}{t'}$$

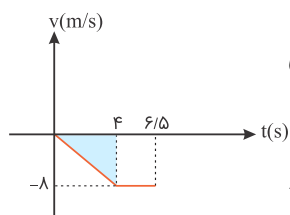
پاسخ مسأله خواهد بود.

گام اول: چون در ابتدا سرعت صفر است و در مسافت ۱۶ متر ابتدا شتاب منفی است، سرعت انتهایی این قسمت منفی است. نمودار سرعت- زمان این قسمت به صورت زیر است:



$$S = 16 = 16 \Rightarrow \frac{2t \times 2}{2} = 16 \Rightarrow t = 4 \text{ s}, \quad v_t = -8 \text{ m/s}$$

گام دوم: در مسافت طی شده از ۱۶ m به ۳۶ m که برابر با ۲۰ m است، سرعت متحرک ثابت و برابر با سرعت انتهایی قسمت قبل است؛ بنابراین مدت حرکت این قسمت برابر با $\Delta t = \frac{\ell}{|v|} = \frac{20}{8} = 2.5 \text{ s}$ است و نمودار سرعت- زمان از ابتدا تا مسافت ۳۶ m به صورت شکل زیر خواهد بود.



گام سوم: از $t = 6/5 \text{ s}$ به بعد، شتاب متحرک برابر با 4 m/s^2 است. باتوجه به نمودار بالا جابه جایی متحرک در $(0, 6/5 \text{ s})$ برابر منفی مساحت زیر نمودار است و مکان متحرک در $t = 6/5 \text{ s}$ برابر است با:

$$\Delta x_{(0, 6/5 \text{ s})} = -S \Rightarrow x_{6/5 \text{ s}} - (-10) = -36 \Rightarrow x_{6/5 \text{ s}} = -46 \text{ m}$$

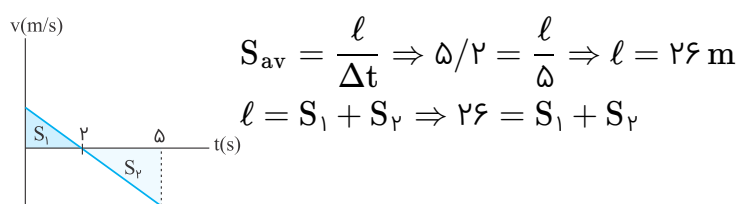
بنابراین از $t = 6/5 \text{ s}$ به بعد، شتاب حرکت 4 m/s^2 ، مکان اولیه $x'_0 = -46 \text{ m}$ و سرعت اولیه $v_0 = -8 \text{ m/s}$ است. حالا باید ببینیم متحرک در چه لحظه ای به $x = 18 \text{ m}$ می رسد. طبق رابطه مکان- زمان شتاب ثابت داریم:

$$x = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + x_0 \Rightarrow 18 = 2t^2 - 8t - 46 \Rightarrow 2t^2 - 8t - 64 = 0$$

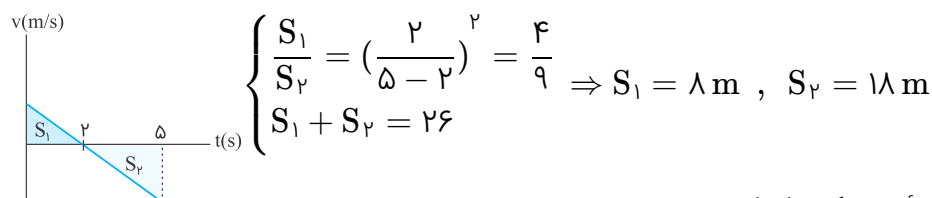
$$\Rightarrow t_1 - 4t - 32 = 0 \Rightarrow \begin{cases} t_1 = -4 \\ t_2 = 8 \text{ s} \end{cases}$$

بنابراین متحرک در لحظه $t = 6/5 + 8 = 14/5 \text{ s}$ از مکان $x = 18 \text{ m}$ عبور می کند.

باتوجه به نمودار، متحرک در $t = ۲$ s تغییر جهت داده است و سرعت آن صفر است. نمودار سرعت - زمان متحرک در بازه ۵ ثانیه نخست به صورت شکل زیر است. مسافت طی شده متوسط متحرک در ۵ s که برابر با مساحت زیر نمودار است، برابر است با:



باتوجه به تشابه بین مثلث‌ها، داریم:



باتوجه به S_1 ، سرعت اولیه متحرک برابر است با:

$$S_1 = \frac{v_o \times ۲}{۲} = ۸ \Rightarrow v_o = +۸ \text{ m/s}$$

حالا می‌توانیم معادله سرعت - زمان متحرک را بنویسیم:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{۰ - ۸}{۲} = -۴ \text{ m/s}^2$$

$$v = at + v_o = -۴t + ۸$$

سرعت متحرک در $t = ۷$ s را به دست می‌آوریم، سپس جابه‌جایی متحرک از $t = ۲$ s (لحظه تغییر جهت) تا $t = ۷$ s را با استفاده از معادله مستقل از زمان به دست می‌آوریم:

$$v_{7s} = -۴t + ۸ = -۴(۷) + ۸ = -۲۰ \text{ m/s}$$

$$v_{7s}^2 - v_{2s}^2 = ۲a\Delta x_{(۲s, 7s)} \Rightarrow (-۲۰)^2 - ۰^2 = ۲(-۴)\Delta x_{(۲s, 7s)} \Rightarrow |\Delta x_{(۲s, 7s)}| = ۵۰ \text{ m}$$

$$\begin{cases} x_1 = ۴ \text{ m} \Rightarrow v_1 = ۳ \text{ m/s} \\ x_2 = ۱۱ \text{ m} \Rightarrow v_2 = ۴ \text{ m/s} \end{cases} \Rightarrow v_2^2 - v_1^2 = ۲a\Delta x$$

$$\Rightarrow ۱۶ - ۹ = ۲a \times (۱۱ - ۴) \Rightarrow a = ۰/۵ \text{ m/s}^2$$

$$v_1^2 - v_o^2 = ۲a\Delta x \Rightarrow ۹ - v_o^2 = ۲ \times ۰/۵(۴ - (-۱)) \Rightarrow ۹ - v_o^2 = ۵$$

$$\Rightarrow ۹ - v_o^2 = ۵ \Rightarrow v_o^2 = ۴ \Rightarrow v_o = ۲ \text{ m/s}$$